EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**

2005

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 2

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\, maior \times Diagonal\, menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\, maior + Base\, menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\qquad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{5\}$, contínua em todo o seu domínio.
Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -3$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - x] = 0$

Em cada uma das opções seguintes, estão escritas duas equações, representando cada uma delas uma recta.

Em qual das opções as duas rectas assim definidas são as assimptotas do gráfico da função f ?

(A) $y = x$ e $x = 5$

(B) $y = -3$ e $x = 2$

(C) $y = x$ e $y = 2$

(D) $y = 2$ e $x = 5$

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$.

Qual das expressões seguintes dá a derivada de f, no ponto π ?

(A) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos x}{x-\pi}$

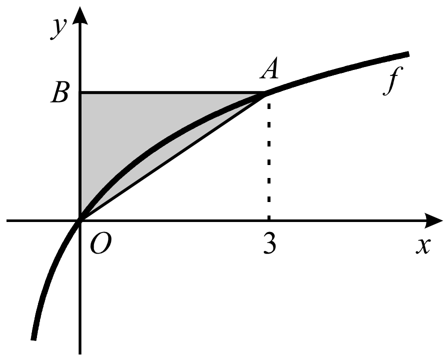
(B) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \pi}{x}$

(C) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos x + 1}{x-\pi}$

(D) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{x+\pi}$

3. Na figura junta, está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, definida, em $]-1, +\infty[$, por

$$f(x) = \log_2(x+1)$$

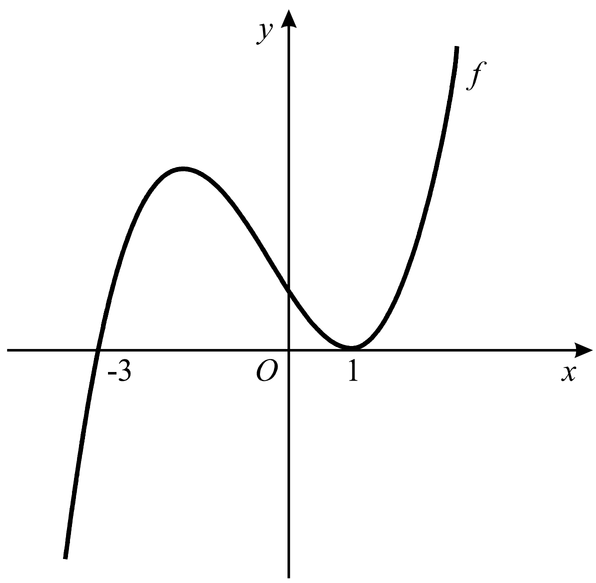


Na mesma figura, está também representado um triângulo rectângulo $[ABO]$.
O ponto A tem abcissa 3 e pertence ao gráfico de f.
O ponto B pertence ao eixo Oy.

Qual é a área do triângulo $[ABO]$?

(A) 4 **(B)** 3 **(C)** 2 **(D)** 1

4. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f, contínua em $\mathbb{R}$.
A função f tem apenas dois zeros: -3 e 1.



Seja g a função definida por $g(x) = \sqrt{f(x)}$

Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função g ?

(A) $[-3, +\infty[$ **(B)** $]-\infty, -3[$

(C) $]-\infty, 1]$ **(D)** $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$

5. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela

x_i	0	2	4
$P(X=x_i)$	a	b	b

(a e b designam números reais).

A média da variável aleatória X é igual a 1.

Qual é o valor de a e qual é o valor de b?

(A) $a=\frac{3}{5}$ $b=\frac{1}{5}$

(B) $a=\frac{1}{2}$ $b=\frac{1}{6}$

(C) $a=\frac{1}{2}$ $b=\frac{1}{4}$

(D) $a=\frac{2}{3}$ $b=\frac{1}{6}$

6. Seja Ω o espaço de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam X e Y dois acontecimentos $(X \subset \Omega$ e $Y \subset \Omega)$.

Apenas uma das afirmações seguintes **não** é equivalente à igualdade $P(X \cap Y)=0$. Qual?

(A) X e Y são ambos impossíveis.

(B) X e Y são acontecimentos incompatíveis.

(C) X e Y não podem ocorrer simultaneamente.

(D) Se X ocorreu, Y não pode ocorrer.

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2\,cis\,\frac{\pi}{4}$ e $z_2 = 2\,i$.
Sejam P_1 e P_2 as imagens geométricas, no plano complexo, de z_1 e de z_2, respectivamente.

Sabe-se que o segmento de recta $[P_1\,P_2]$ é um dos lados do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo w.

Qual é o valor de n?

(A) 10 **(B)** 8 **(C)** 6 **(D)** 4

Grupo II

> Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.
>
> **Atenção**: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. Considere $w = \dfrac{2+i}{1-i} - i$

Sem recorrer à calculadora, escreva w na forma trigonométrica.

1.2. Considere $z_1 = cis(\alpha)$ e $z_2 = cis\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Mostre que a imagem geométrica, no plano complexo, de $z_1 + z_2$ pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2. Admita que o número de elementos de uma população de aves, t anos após o início de 1970, é dado aproximadamente por

$$P(t) = 5{,}2 \times 10^7 \times e^{(N-M)\,t}\,, \qquad t \geq 0,$$

em que N e M são duas constantes, denominadas, respectivamente, *taxa de natalidade* e *taxa de mortalidade* da população.

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

2.1. Sabendo que $N < M$, calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t)$ e interprete o resultado obtido, no contexto do problema.

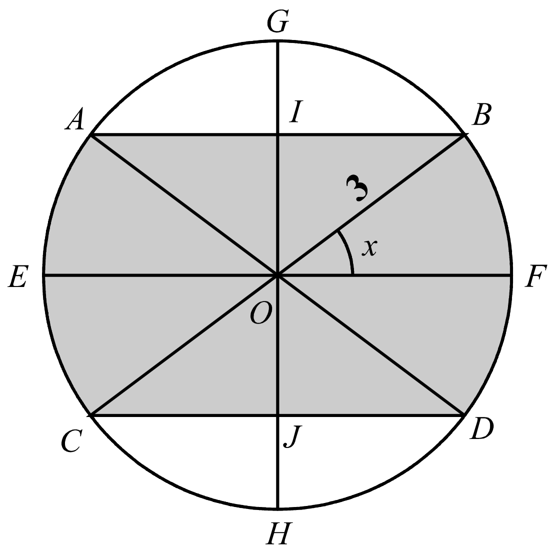
2.2. No início de 2000, a população era metade da que existia no início de 1970.

Sabendo que a *taxa de natalidade* é $7{,}56$, determine a *taxa de mortalidade*.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Na figura está representada uma circunferência com centro no ponto O e **raio** $\mathbf{3}$.
Os diâmetros $[EF]$ e $[GH]$ são perpendiculares.



Considere que o ponto B se desloca sobre o arco FG.

Os pontos A, C e D acompanham o movimento do ponto B, de tal forma que:

- as cordas $[AB]$ e $[CD]$ permanecem paralelas a $[EF]$;
- $[AD]$ e $[BC]$ são sempre diâmetros da circunferência.

Os pontos I e J também acompanham o mesmo movimento, de tal forma que são sempre os pontos de intersecção de $[GH]$ com $[AB]$ e $[CD]$, respectivamente.

Para cada posição do ponto B, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo FOB $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

3.1. Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x, por

$$A(x) = 18\,(x + \operatorname{sen} x \,.\, \cos x)$$

Sugestão: use a decomposição sugerida na figura.

3.2. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: *Qual é o valor de x para o qual a área da região sombreada é igual a metade da área do círculo?*

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

4. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que a sua **derivada** é dada por

$$f'(x) = 2 + x \ln x \ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+$$

Sem recorrer à calculadora, resolva as alíneas seguintes:

4.1. Seja r a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.
Seja P o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox.
Sabendo que $f(1) = 3$, determine a abcissa do ponto P.

4.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

5. Num saco, estão três bolas pretas e nove bolas brancas, indistinguíveis ao tacto.
Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, as doze bolas do saco.
Determine:

5.1. A probabilidade de as duas primeiras bolas extraídas não serem da mesma cor. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5.2. A probabilidade de as três bolas pretas serem extraídas consecutivamente (umas a seguir às outras). Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

6. Considere um prisma regular em que cada base tem n lados.
Numa pequena composição, justifique que o número total de diagonais de todas as faces do prisma (incluindo as bases) é dado por

$$2\,({}^{n}C_2 \ - \ n) + 2\,n$$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I	**63**
Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II		**137**
1.		21
1.1.	10	
1.2.	11	
2.		28
2.1.	14	
2.2.	14	
3.		28
3.1.	14	
3.2.	14	
4.		28
4.1.	14	
4.2.	14	
5.		20
5.1.	10	
5.2.	10	
6.		12

TOTAL	**200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**

2005

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 10
- **1.2.** 11

2. 28
- **2.1.** 14
- **2.2.** 14

3. 28
- **3.1.** 14
- **3.2.** 14

4. 28
- **4.1.** 14
- **4.2.** 14

5. 20
- **5.1.** 10
- **5.2.** 10

6. 12

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	D	A	A	C	D	C	C
Versão 2	C	C	B	A	D	A	B

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.

2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.

3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.

4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
- erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
- erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.

4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.

6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.

7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

Critérios específicos

Para cada item são apresentados:

- a cotação total do item;
- para cada processo de resolução apresentado, uma subdivisão da cotação total em cotações parcelares;
- exemplos de possíveis respostas dos examinandos, com a respectiva cotação a atribuir, devidamente explicada.

1.1. 10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

$\dfrac{2+i}{1-i} - i = \dfrac{1+3i}{2} - i$ 3

$\dfrac{1+3i}{2} - i = \dfrac{1+i}{2}$ $\left(\text{ou } \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$ 2

$\dfrac{1+i}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, cis\, \dfrac{\pi}{4}$ **(ver nota 1)** 5

2.º Processo

$\dfrac{2+i}{1-i} - i = \dfrac{1}{1-i}$ 2

$\dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1+i}{2}$ $\left(\text{ou } \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$ 3

$\dfrac{1+i}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, cis\, \dfrac{\pi}{4}$ **(ver nota 1)** 5

3.º Processo

$\dfrac{2+i}{1-i} - i = \dfrac{1}{1-i}$ 2

$1 = cis\, 0$ 1

$1 - i = \sqrt{2}\, cis\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ **(ver nota 2)**.. 4

$\dfrac{cis\, 0}{\sqrt{2}\, cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, cis\, \dfrac{\pi}{4}$ 3

Notas:

1. A escrita de $\frac{1+i}{2}$ na forma trigonométrica deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

$\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(\text{ou } \sqrt{\frac{1}{2}}\text{, ou } \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 2

Argumento de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ correcto (não se exige a apresentação de cálculos intermédios, dado que a imagem geométrica do complexo pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares) 2

Escrita na forma $\rho \, cis \, \theta$ 1

ou

$1+i=\sqrt{2}\,cis\,\frac{\pi}{4}$ 2

$2=2\,cis\,0$ 1

$\frac{\sqrt{2}\ cis\ \frac{\pi}{4}}{2\,cis\,0}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ cis\ \frac{\pi}{4}$ 2

2. A escrita de $1-i$ na forma trigonométrica deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

$\left|1-i\right|=\sqrt{2}$ 1

Argumento de $1-i$ correcto (não se exige a apresentação de cálculos intermédios, dado que a imagem geométrica do complexo pertence à bissectriz dos quadrantes pares) 2

Escrita na forma $\rho \, cis \, \theta$ 1

3. Não deve ser valorizada a passagem à forma trigonométrica dos complexos que aparecem na expressão inicial: $1-i$, i e $2+i$ (este último só pode ser escrito na forma trigonomética utilizando um valor aproximado para o argumento, o que só pode ser feito por meio da calculadora, contrariando a instrução do enunciado). A tentativa de resolução do exercício por esta via deve ser cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\frac{2+i}{1-i}-i=\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}-i=\frac{2+2i+i+i^2}{1+1}-i=\frac{2+3i-1}{2}-i=$$

$$=\frac{1+3i}{2}-i=\frac{1+3i-2i}{2}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1 \qquad \left.\begin{array}{l} tg\,\theta=1 \\ \theta\in 1.^{\text{o}}\,\text{Q}\end{array}\right\}\ \theta=\frac{\pi}{4} \qquad z_1=1\,cis\,\frac{\pi}{4}$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $3+2+3\,(0+2+1)=8$

Exemplo 2

$$\frac{2+i}{1-i}-i=\frac{(2+i)-i\,(1-i)}{1-i}=\frac{2+i-i+i^2}{1-i}=\frac{1}{1-i}=$$

$$=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+i$$

$$|z_1|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{5}{4}} \qquad tg\,\alpha=\frac{1}{2} \qquad z_1=\sqrt{\frac{5}{4}}\,cis\,\frac{1}{2}$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $2+1^{(*)}+2\,(2+0^{(**)}+0^{(***)})=5$

(*) O examinando comete um erro muito grave, na última passagem da segunda linha. Ver critério geral 4.2.
(**) A tangente do argumento de $1/2+i$ é 2 (e não $1/2$).
(***) O examinando não escreveu o complexo na forma $\rho\,cis\,\theta$, mas sim $\rho\,cis\,(tg\,\theta)$.

Exemplo 3

$$\frac{2+i}{1-i} - i = \frac{(2+i)-i\,(1-i)}{1-i} = \frac{2+\ i-\ i\ -i^2}{1-i} = \frac{3}{1-i} =$$

$$= \frac{3\,cis\,0}{\sqrt{2}\ cis\left(\frac{5\,\pi}{4}\right)} = \frac{3}{\sqrt{2}}\ cis\left(-\ \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{3\ \sqrt{2}}{2}\ cis\left(-\ \frac{5\pi}{4}\right)$$

Cotação a atribuir (3.º processo): $1+1+2\,(1+0+1)+3=7$

Exemplo 4

$$\frac{2+i}{1-i} - i = \frac{(2+i)-i\,(1-i)}{1-i} = \frac{2+\ i-\ i+i^2}{1-i} = \frac{2+i^2}{1-i}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{(2+i^2)^2}}{\sqrt{(1-i)^2}} = \frac{\sqrt{4+i^4}}{\sqrt{1-i^2}} = \frac{\sqrt{5}}{1}$$

$$tg\ \theta = \frac{1}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{7} \qquad z = \sqrt{5}\ cis\ \frac{\pi}{7}$$

Cotação a atribuir (3.º processo): $1+\ 0\ +0+0=1$

Exemplo 5

$$2+i\ \rightarrow\ \sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5} \qquad tg\ \theta = \frac{1}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{7} \qquad \sqrt{5}\ cis\ \frac{\pi}{7}$$

$$1-i\ \rightarrow\ \sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2} \qquad tg\ \theta = -1 \qquad \theta = \frac{7\pi}{4} \qquad \sqrt{2}\ cis\ \frac{7\pi}{4}$$

$$\frac{\sqrt{5}\ cis\ \frac{\pi}{7}}{\sqrt{2}\ cis\ \frac{7\pi}{4}} - cis\ \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\ cis\left(\frac{\pi}{7} - \frac{7\pi}{4}\right) - cis\ \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\ cis\left(-\ \frac{45\pi}{28}\right) - cis\ \frac{\pi}{2}$$

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) Ver nota 3.

1.2. .... **11**

$z_1 = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$ 1

$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ 1

$z_2 = \mathrm{sen}\,\alpha + i\cos\alpha$ 2

$z_1 + z_2 = \cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha + i\,(\cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha)$ **(ver nota 1)**........................ 4

Conclusão ($z_1 + z_2$ tem parte real igual ao coeficiente da parte imaginária, pelo que a sua imagem geométrica pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares) 3

Notas:

1. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se o examinando apresentar, correctamente, o complexo $z_1 + z_2$ na forma $a + ib$, com $a = b$.
2. Se o examinando se limitar a verificar a afirmação do enunciado para um caso partircular, a sua resposta deverá ser cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$z_1 + z_2 = cis\,\alpha + cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha + \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] =$$

$$= \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha + i\cos\alpha = \cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha + i\,(\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha)$$

$\cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha = \mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha$, logo está provado.

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 2 + 4 + 3 = 11$

Exemplo 2

$$z_1 + z_2 = cis\,\alpha + cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] =$$

$$= \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha = \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha + i\,(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)$$

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 2 + 4 + 0 + (-1)^{(*)} = 7$

(*) Parêntesis mal colocados, na segunda linha. Ver critério geral 6.

Exemplo 3

$$\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha = \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha$$

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 2 + 0^{(*)} + 0 = 4$

(*) O complexo $z_1 + z_2$ não está na forma $a + ib$. Ver nota 1.

Exemplo 4

$$cis\,\alpha + cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \alpha + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) + \text{sen}\,\alpha - i\cos\alpha$$

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 1 + 0 + 0 + (-1)^{(*)} = 2$

(*) Parêntesis mal colocados, na primeira linha. Ver critério geral 6.

Exemplo 5

$$cis\,\alpha + cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= \cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\,\text{sen}\,\alpha + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\cos\alpha + 2i\,\text{sen}\,\alpha$$

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 2$

Exemplo 6

$$cis\,\alpha + cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cis\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cis\,\frac{\pi}{2} = i$$

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

Exemplo 7

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad cis\,\alpha + cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cis\,\frac{\pi}{2} + cis\,0 = i + 1 = 1 + i$

$1 + i$ pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) Ver nota 2.

2.1. .... **14**

Cálculo do limite 9

Valor correcto do limite (0) 3

Justificação **(ver nota 1)** ....6 (2+2+2)

Interpretação **(ver notas 2, 3 e 4)** 5

Notas:

1. A justificação completa envolve as seguintes referências:

- $N - M$ é negativo;
- $(N-M)\,t \;\rightarrow\; -\infty$;
- $e^{(N-M)\,t} \rightarrow 0$

Cada referência vale 2 pontos.

2. A interpretação deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Interpretação correcta (*Com o passar do tempo, a população de aves tende a extinguir-se*) 5

Interpretação conceptualmente correcta, mas com algumas incorrecções de linguagem 4

3. Se o examinando, na sua interpretação, acrescentar que o número de aves diminui, não deve ser penalizado (apesar de a diminuição do número de aves ser uma interpretação do facto de a função ser decrescente, e não do limite pedido). Se o examinando apenas referir que o número de aves diminui, devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à interpretação.

4. Se o valor do limite não tiver sido calculado, ou se estiver errado, devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à interpretação, qualquer que esta seja.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(5{,}2 \times 10^7 \times e^{(N-M)\,t}\right) =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(5{,}2 \times 10^7 \times e^{x\,t}\right) = \quad 5{,}2 \times 10^7 \times e^{-\infty} = 5{,}2 \times 10^7 \times 0 = 0$$

$x < 0$ porque $N < M$

A longo prazo, a população de aves vai tender a desaparecer.

Cotação a atribuir: $9\ [\,3 + 6\,(2 + 2 + 2)\,] + 5 = 14$

Exemplo 2

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} 5{,}2 \times 10^7 \times e^{(N-M)\,t} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} 5{,}2 \times 10^7 \times e^{(-a)\,(+\infty)} = \lim_{t \to +\infty} 5{,}2 \times 10^7 \times e^{-\infty} = 5{,}2 \times 10^7 \times 0 = 0$$

Se a taxa de natalidade é menor que a taxa de mortalidade, logicamente que passados muitos anos, a população será nula, já que nascem menos indivíduos do que aqueles que morrem.

Cotação a atribuir: $9\ [\,3 + 6\,(2^{(*)} + 2 + 2)\,] + 5 + \ (-1)^{(**)} = 13$

(*) Considerou-se que, ao escrever $-a$, o examinando refere que $N - M < 0$, se bem que de uma forma formalmente incorrecta, já que $-a$ pode designar um número positivo.

(**) Para além do erro formal já referido, o examinando mantém a expressão $\lim\limits_{t \to +\infty}$ após a passagem da variável t ao limite ($+\infty$). Ver critério geral 6.

Exemplo 3

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} (5{,}2 \times 10^7 \times e^{(N-M)\,t}) = 5{,}2 \times 10^7 \times e^{-\infty} = 0$$

Quer dizer que, à medida que o tempo passa, o número de aves vai diminuindo.

Cotação a atribuir: $7\ [3 + 4(0 + 2 + 2)] + 0^{(*)} = 7$

(*) Ver nota 3.

Exemplo 4

$$\lim_{t\to+\infty} 5{,}2\times 10^7 \times e^{(N-M)\,t} = 5{,}2\times 10^7 \times 0 = 0$$

Se a taxa de natalidade ao longo do tempo permanecer inferior à de mortalidade, a população de aves é extinta.

Cotação a atribuir: $3\,[\,3+0\,(0+0+0)\,]+5=8$

Exemplo 5

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(5{,}2\times 10^7 \times e^{(N-M)\,t}\right) = 0$$

Como $N<M,\ N-M$ vai ser um número negativo. O logaritmo neperiano desse número negativo vai ser um número muito pequeno que multiplicado por $5{,}2\times 10^7$ vai tender para zero.

Cotação a atribuir: $3\,[\,3+0\,(0^{(*)}+0+0)\,]+0=3$

(*) Apesar de ter sido referido que «*como* $N<M,\ N-M$ *vai ser um número negativo*», tal não pode ser considerado como fazendo parte da justificação do valor do limite, dada a frase que o examinando escreve a seguir.

Exemplo 6

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} 5{,}2\times 10^7 \times e^{(N-M)+\infty} = 5{,}2\times 10^7 \times e^0 = 5{,}2\times 10^7$$

Daqui a muitos anos, o número de aves existente na população vai tender para $5{,}2\times 10^7$.

Cotação a atribuir: $0\ +\ 0^{(*)}=0$

(*) Ver nota 4.

Exemplo 7

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} 5{,}2\times 10^7 \times e^{+\infty} = +\infty$$

A população de aves tende a aumentar com o passar dos anos, apesar da taxa de natalidade ser menor do que a de mortalidade.

Cotação a atribuir: $0\ +\ 0^{(*)}=0$

(*) Ver nota 4.

2.2. .... **14**

$P(0) = 5{,}2 \times 10^7$ 2

$P(30) = 5{,}2 \times 10^7 \times e^{30(7{,}56-M)}$ 2

Equacionar o problema $\left(P(30) = \frac{1}{2}\ P(0)\right)$ 2

Concluir que $e^{30(7{,}56-M)} = \frac{1}{2}$ 3

Concluir que $M \approx 7{,}58$ 5

Notas:

1. Se o examinando não apresentar o resultado final arredondado às centésimas, ou se apresentar um arredondamento incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta.

2. Se o examinando não respeitar a indicação, expressa no enunciado, de conservação de um mínimo de três casas decimais, nos cálculos intermédios, deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\frac{5{,}2\times 10^7 \times e^0}{5{,}2\times 10^7 \times e^{(7{,}56-M)\,.\,30}} = 2 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 1 = 2\, e^{(7{,}56-M).30} \ \Leftrightarrow\ e^{226{,}8-30M} = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -M = \frac{ln\left(\frac{1}{2}\right) - 226{,}8}{30} \ \Leftrightarrow\ M = 8{,}253$$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 2^{(*)} + 2 + 3 + 3^{(**)} = 12$

(*) Etapas implícitas.

(**) O valor de M obtido pelo examinando não está correcto (o examinando cometeu um erro, ao introduzir a expressão na calculadora) e não está arredondado às centésimas. Daí a penalização de 2 pontos, na última etapa.

Exemplo 2

$$\frac{P(30)}{2} = P(0) \;\Leftrightarrow\; \frac{5{,}2\times 10^7 \times e^{(7{,}56-M).30}}{2} = 5{,}2\times 10^7 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 5{,}2\times 10^7 \times e^{226{,}8-30M} = 10{,}4\times 10^7 \;\Leftrightarrow\; e^{226{,}8}.\, e^{-30M} = 2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; e^{-30M} = \frac{2}{e^{226{,}8}} \;\Leftrightarrow\; M = \frac{ln\left(\frac{2}{e^{226{,}8}}\right)}{-30}$$

Cotação a atribuir: $2+2+0+3+3=10$

Exemplo 3

1970: $P(0) = 5{,}2\times 10^7 \times e^0 = 5{,}2\times 10^7$ 2000: $5{,}2\times 10^7/\,2 = 2{,}6\times 10^7$

$2000-1970=30$ $2{,}6\times 10^7 = 5{,}2\times 10^7 \times e^{(7{,}56-M).30}$

$0{,}5 = e^{226{,}8-30M}$

$ln(e^{0{,}5}) = ln(e^{226{,}8-30M})$

$0{,}5 = 226{,}8-30M$

$M \approx 7{,}54$

Cotação a atribuir: $2+2+2+3+0=9$

Exemplo 4

$$\frac{5{,}2\times 10^7}{2} = 2{,}6\times 10^7$$

$$2{,}6\times 10^7 = 5{,}2\times 10^7 \times e^{(7{,}56-M).\,t} \;\Leftrightarrow\; 0{,}5 = e^{7{,}56t-Mt}$$

$$\Leftrightarrow\; 0{,}5 = e^{7{,}56t} - e^{Mt} \;\Leftrightarrow\; \frac{0{,}5}{e^{7{,}56t}} = -\,e^{Mt} \;\Leftrightarrow\; 2{,}6\times 10^{-4} = -\,e^{Mt} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -\,ln(2{,}6\times 10^{-4}) = M \;\Leftrightarrow\; M = 8{,}25$$

Cotação a atribuir: $2^{(*)}+0+0+0+0=2$

(*) Etapa implícita.

Exemplo 5

1970 $\to 52\,000\,000$ 2000 $\to 26\,000\,000$

Cotação a atribuir: $2+0+0+0+0=2$

Exemplo 6

$$P(2000) = \ 5{,}2\times 10^7 \times e^{(7{,}56-M)\,2000} = 5{,}2\times 10^7\times e^{15120-2000M}$$

$$P(1970) = \ 5{,}2\times 10^7 \times e^{(7{,}56-M)\,1970} = 5{,}2\times 10^7\times e^{14893{,}2-1970M}$$

$$5{,}2\times 10^7\times e^{15120-2000M} = \frac{1}{2}\times 5{,}2\times 10^7\times e^{14893{,}2-1970M} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ e^{15120-2000M} = \frac{1}{2}\times e^{14893{,}2-1970M} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ln(e^{15120-2000M}) = ln\left(\frac{1}{2}\times e^{14893{,}2-1970M}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15120-2000M = ln\left(\frac{1}{2}\right)+14893{,}2-1970M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1970M-2000M = -ln(2)+14893{,}2-15120 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -30M = -ln(2)-226{,}8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 30M = ln(2)+226{,}8 \Leftrightarrow M = \frac{ln(2)+226{,}8}{30} \Leftrightarrow M\approx 7{,}58$$

Cotação a atribuir: $0+0+2+3+5=10$

Exemplo 7

$$P(2000) = \frac{5{,}2\times10^7\times e^{(7{,}56-M)\,2000}}{2} = 2{,}6\times 10^7\times e^{15120-2000M}$$

$$e^{15120-2000M} = \frac{1}{2{,}6\times10^7} \Leftrightarrow 15120-2000M = ln\left(\frac{1}{2{,}6\times10^7}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{ln\left(\frac{1}{2{,}6\times10^7}\right)-15120}{-2000} \Leftrightarrow M\approx 7{,}55$$

Cotação a atribuir: $0+0+0+0+3^{(*)}=3$

(*) O grau de dificuldade da última etapa, que é a resolução da equação $e^{15120-2000M} = \frac{1}{2{,}6\times10^7}$, obtida pelo examinando, não é inferior ao da resolução da equação $e^{30(7{,}56-M)}=1/2$.

Por isso, de acordo com o critério geral 4.3, a cotação a atribuir a esta última etapa seria de 5 pontos, se ela estivesse correctamente resolvida. Acontece que o valor obtido pelo examinando para M evidencia que, ao introduzir a expressão de M na calculadora, o examinando não colocou o denominador do argumento do logaritmo dentro de parêntesis, erro que se considerou merecer uma penalização de 2 pontos (não é um erro ocasional de contas).

3.1. .... **14**

$\overline{OI} = 3\,\mathrm{sen}\,x$ 3

$\overline{BI} = 3\cos x$ 3

Área do triângulo $[OIB] = \dfrac{9\,\mathrm{sen}\,x\cos x}{2}$

ou Área do triângulo $[OAB] = 9\,\mathrm{sen}\,x\cos x$ 2

Área do sector circular correspondente ao arco $BF = \dfrac{9\,x}{2}$

ou Área do sector circular correspondente ao arco $BD = 9\,x$ 2

Restantes cálculos **(ver nota)** 4

Nota:
Só pode ser atribuída pontuação relativa aos restantes cálculos se:
- estiverem completamente correctos;
- o examinando conseguir chegar à expressão de $A(x)$, dada no enunciado.

Se pelo menos uma destas duas condições não se verificar, a cotação a atribuir a esta etapa é de 0 (zero) pontos. Estas duas condições pressupõem que as expressões obtidas para as áreas de um triângulo e de um sector circular estão correctas.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$A_{triângulo} = \frac{3\,\mathrm{sen}\,x \times 3\cos x}{2}$$

$$A_{4\,triângulos} = \frac{3\,\mathrm{sen}\,x \times 3\cos x}{2} \times 4 = \frac{12\,\mathrm{sen}\,x \times 12\cos x}{2} = 6\,\mathrm{sen}\,x \times 6\cos x$$

$$A_{sector} = \frac{x\,r^2}{2} = \frac{x\,3^2}{2} = \frac{9\,x}{2}$$

$$A_{4\,sectores} = \frac{9\,x}{2} \times 4 = \frac{36\,x}{2} = 18\,x$$

$$A_{total} = 18\,x + 18\,\mathrm{sen}\,x\,\cos x = 18\,(x + \mathrm{sen}\,x\,\cos x)$$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 3^{(*)} + 2 + 2 + 0 = 10$

(*) Etapa implícita.

Exemplo 2

$\text{sen}\, x = \dfrac{\overline{IB}}{3} \qquad \overline{IB} = 3\,\text{sen}\, x$

$\cos x = \dfrac{\overline{IO}}{3} \qquad \overline{IO} = 3\cos x$

$\dfrac{x \times 3^2}{2} \times 4 = 18\,x$

$\dfrac{3\,\text{sen}\, x \times 3\cos x}{2} \times 4 \;=\; 18\,\text{sen}\, x \cos x$

$A(x) = \; 18\,x + 18\,\text{sen}\, x\; \cos x \;=\; 18\,(x + \;\text{sen}\, x\; \cos x\,)$

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 2 + 2 + 4 = 8$

Exemplo 3

$\overline{IB} = 3\cos x$

$\overline{IO}^{\,2} \; + \; (3\cos x)^2 = 3^2 \qquad \overline{IO}^{\,2} \; = 9 - \; 9\cos^2 x$

$\overline{IO}^{\,2} \; = 9\,(1 - \; \cos^2 x) \qquad \overline{IO}^{\,2} \; = 9 \; \text{sen}^2\, x$

$\overline{IO} \; = 3 \; \text{sen}\, x$

$\dfrac{x \times 3^2}{2} \; = \; \dfrac{9\,x}{2} \qquad \dfrac{9\,x}{2} \times 4 = 18\,x$

$\dfrac{3\,\text{sen}\, x \times 6\cos x}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \;=\; 18\,\text{sen}\, x \cos x$

$A(x) = \; 18\,x + 18\,\text{sen}\, x\; \cos x \;=\; 18\,(x + \;\text{sen}\, x\; \cos x\,)$

Cotação a atribuir: $3 + 3 + 2 + 2 + 4 = 14$

3.2. .... **14**

Equacionar o problema **(ver nota 1)**.. 5

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a equação **(ver notas 2 e 6)**...4

Conclusão: $x \approx 0{,}42$ **(ver notas 3, 4, 5 e 6)** 5

Notas:

1. O examinando não necessita de apresentar explicitamente esta equação. Havendo evidência de que o examinando procura o objecto cuja imagem, por meio de A, é $9\pi/2$, os 5 pontos relativos a esta etapa devem ser atribuídos.

2. Os 4 pontos relativos à explicação do método utilizado devem ser atribuídos de acordo com o seguinte critério:

Apresentação do gráfico da função A, com respeito pelo domínio desta função, e da recta de equação $y = 9\pi/2$, bem como do ponto de intersecção e respectiva abcissa (ou apresentação do gráfico de $A(x) - 9\pi/2$ e respectivo zero) 4

Apresentação dos gráficos com ausência de alguns elementos (por exemplo, ausência da abcissa do ponto de intersecção) e/ou com algumas incorrecções (por exemplo, o gráfico da função A não respeita o seu domínio) ....1 a 3

3. A escrita do valor aproximado pedido (para x) deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às centésimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $0{,}42$ 5

Resposta $0{,}41$ 3

Resposta $0{,}43$ ou $0{,}40$ 2

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento superior às centésimas):

Valor no intervalo $[0{,}41\ ;\ 0{,}42]$ 2

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0{,}40\ ;\ 0{,}43]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às décimas):

Valor igual a $0{,}4$ 2

Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às unidades):

Qualquer resultado 0

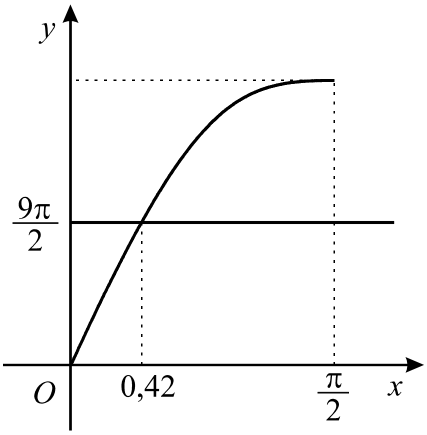
4. Com a calculadora em modo *grau*, o gráfico da função definida por $18(x + \operatorname{sen} x \,.\, \cos x)$ intersecta a recta $y = 9\pi/2$, num ponto cuja abcissa é aproximadamente igual a $0{,}77$. Assim, se o examinando apresentar este valor, devem ser atribuídos 2 pontos a esta etapa. Qualquer outro valor, mesmo que próximo de $0{,}77$, deve ser cotado com 0 (zero) pontos.

5. Se o examinando não escrever a conclusão, a cotação a atribuir ao valor por ele apresentado como abcissa do ponto de intersecção dos gráficos deve sofrer uma penalização de 2 pontos, relativamente às situações descritas nas notas 3 e 4. Se, por aplicação desta norma, a cotação desta etapa resultar negativa, deve ser convertida em 0 (zero) pontos.

6. Se o examinando utilizar um processo não gráfico, como, por exemplo, uma tabela, para encontrar o valor pedido, as duas últimas etapas devem ser cotadas com 0 (zero) pontos. Esta norma também se aplica no caso em que não é apresentada qualquer explicação para o método utilizado para resolver a equação $A(x) = 9\pi/2$.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1



$x \approx 0{,}42$

Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 4 + 5 = 14$

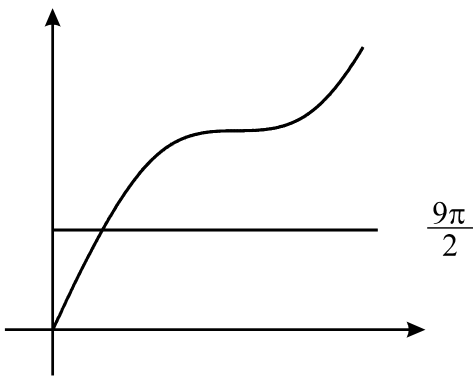
(*) Ver nota 1.

Exemplo 2

Window
xmin=0
xmax=5
xscl=1
ymin=0
ymax=35
yscl=1

$y1 = 18(x + sen(x)\,cos(x))$
$y2 = 9\pi/2$

Calculei a intersecção entre $y1$ e $y2$



$x \approx 0{,}41$

Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 2^{(**)} + 3^{(***)} = 10$

(*) Ver nota 1.

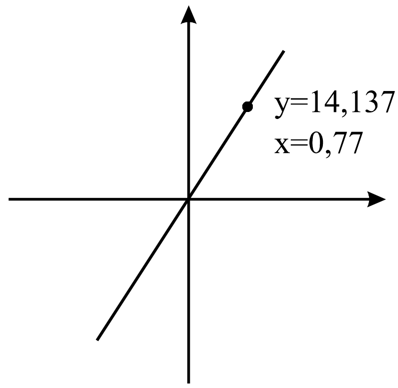
(**) O gráfico não respeita o domínio (contém pontos cujas abcissas ultrapassam $\pi/2$) e não é assinalada, no gráfico, a abcissa do ponto de intersecção, o que contraria a instrução, dada no enunciado, de apresentar coordenadas relevantes.

(***) Ver nota 3, 1.º caso.

Exemplo 3

$\pi r^2 = \pi . 3^2 = 9\pi$

$\frac{9\pi}{2} \approx 14{,}137$



Quando $A(x)$ é $\frac{9\pi}{2}$, $x \approx 0{,}77$

Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 1^{(**)} + 2^{(***)} = 8$

(*) Ver nota 1.

(**) O gráfico não respeita o domínio (contém pontos cujas abcissas são negativas), o gráfico apresentado é um segmento de recta (a função A não é afim) e não é assinalada a recta de equação $y = 9\pi/2$.

(***) Ver nota 4.

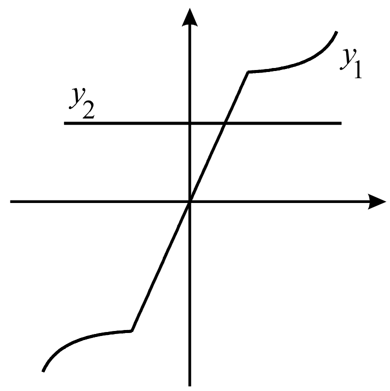
Exemplo 4

Introduzi

$y1 = 18(x + sen(x)\, cos(x))$

$y2 = 9\pi/2$

e pedi a intersecção



$x \approx 0{,}4$

Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 1^{(**)} + 2^{(***)} = 8$

(*) Ver nota 1.

(**) O gráfico não respeita o domínio (contém pontos cujas abcissas são negativas e pontos cujas abcissas ultrapassam $\pi/2$), tem pontos angulosos, uma parte do gráfico é um segmento de recta e não é apresentada a abcissa do ponto de intersecção.

(***) Ver nota 3, 3.º caso.

Exemplo 5

Inseri a função na máquina e depois indo à tabela vê-se que o valor de x para o qual $A(x) = 9\pi/2$ é para $x \approx 0{,}4$ radianos.

Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 0^{(**)} + 0^{(**)} = 5$

(*) Ver nota 1.

(**) Ver nota 6.

4.1. .... **14**

$f'(1) = 2$ 2

Identificar o declive da recta r com $f'(1)$ 3

Determinar uma equação da recta r

ou estabelecer a igualdade $2 = \dfrac{3-0}{1-x}$ 4

Calcular a abcissa pedida 5

Notas:

1. A obtenção do declive da recta r por um método incorrecto implica a atribuição de cotação 0 (zero), não só à segunda etapa, mas também às etapas seguintes; isto é, a pontuação relativa às duas últimas etapas só pode ser atribuída se o declive da recta r tiver sido obtido a partir da sua identificação com $f'(1)$.

2. Se o examinando, não reparando que já é dada a expressão da derivada de f, assumir f' como f, calculando o declive da recta r à custa da derivada da função dada no enunciado, deve ser penalizado em 4 pontos, na totalidade das duas primeiras etapas, ou seja, dos 5 (2+3) pontos previstos, deverá ser atribuído, no máximo, 1 ponto.
Este ponto só deve ser atribuído no caso em que o examinando calcula correctamente o declive da recta r, de acordo com a confusão que estabeleceu ao assumir f' como f.
As duas etapas subsequentes devem receber a cotação indicada, se correctamente resolvidas, de acordo com o erro cometido. Nesta situação, é de aceitar que o examinando assuma $f(1)$ como 3 (valor dado no enunciado) ou como 2 (valor por ele encontrado ao assumir f' como f).

3. Se o examinando derivar a função do enunciado, mas designar essa derivada por $f''(x)$, devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à sua resposta (considerou-se que esta situação é diferente da descrita na nota 2, já que, ao escrever $f''(x)$, o examinando mostra não estar a assumir f' como f).

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$m = \dfrac{3}{1} \qquad y = 3x$

$3x = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 1.

Exemplo 2

$2 + x\,ln(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x\,ln(x) = -2$

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0 + 0 = 0$

Exemplo 3

$y - f(1) = f'(1)\,(x-1) \;\Leftrightarrow\; y - 3 = 2\,(x-1) \;\Leftrightarrow\; y = 2x + 1$

Cotação a atribuir: $2 + 3 + 4 + 0 = 9$

Exemplo 4

$y = 3x + 3 \qquad 3x + 3 = 0 \;\Leftrightarrow x = -1$

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver critério geral 8.

Exemplo 5

$m = 2 + 1\,ln\,1 \qquad m = 2$

$2 = \frac{3-0}{1-x} \;\Leftrightarrow\; 2 - 2x = 3 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{2}$

Cotação a atribuir: $2 + 3 + 4 + 4^{(*)} = 13$

(*) O examinando não referiu que a primeira equivalência só é válida para $x \neq 1$.

Exemplo 6

$y + y_0 = m\,(x + x_0) \qquad f'(1) = 2 \qquad m = 2$

$y + 3 = 2\,(x+1) \;\Leftrightarrow\; y = 2x - 1$

$2x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2}$

Cotação a atribuir: $2 + 3 + 0 + 5 = 10$

Exemplo 7

$f'(x) = ln\,(x) + 1 \qquad f'(1) = ln\,(1) + 1 = 1 \qquad m = 1$

$f(1) = 2 \qquad y - 2 = x - 1 \;\Leftrightarrow\; y = x + 1$

$x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$

Cotação a atribuir: $1^{(*)} + 4 + 4^{(**)} = 9$

(*) Ver nota 2.

(**) Penalizou-se a última etapa em 1 ponto (ver critério geral 4.2).

4.2. .... **14**

Determinar a segunda derivada de f **(ver nota 1)** 5

Determinar o zero da segunda derivada de f **(ver nota 2)** 4

Estudo do sinal de f'' e consequente conclusão, relativamente aos sentidos das concavidades do gráfico de f e à existência de ponto de inflexão (estudo que pode ser apresentado através de um quadro) 5

Primeira linha do quadro **(ver nota 3)** 2

Sinal de f'' **(ver nota 4)** 1

Relação entre o sinal de f'' e os sentidos das concavidades do gráfico de f... 1

Evidenciar a existência de ponto de inflexão 1

Notas:

1. Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a segunda derivada de f, a cotação mínima a atribuir a esta etapa é de 1 ponto.

2. Se existir evidência de que o examinando pretende determinar o zero da segunda derivada de f, a cotação mínima a atribuir a esta etapa é de 1 ponto.

3. A primeira linha do quadro deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Primeira linha correcta (indicação do zero da segunda derivada de f e indicação correcta do domínio, de 0 a $+\infty$) 2

Outras situações 0

4. A segunda linha do quadro deverá ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Segunda linha do quadro de acordo com a primeira linha e com a expressão obtida para a segunda derivada de f 1

Outras situações 0

5. Pode acontecer que o examinando, não reparando que já é dada a expressão da derivada de f, assuma f' como f e derive duas vezes esta função. Neste caso, a cotação a atribuir à sua resposta é de 7 pontos, caso ela esteja completamente correcta, de acordo com a confusão estabelecida. Se, para além desta confusão, a resolução contiver algum erro, deverão ser atribuídos 0 (zero) pontos à resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$f''(x) = 0 + 1\,.\,ln\,x \,+\, x\,.\,\frac{1}{x} \;=\; ln\,x + \frac{x}{x} \;=\; ln\,x \,+\, 1$$

$$ln\,x \;+\, 1 = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; ln\,x \,=\, 1 \;\;\Leftrightarrow\;\; x = e^1$$

Cotação a atribuir: $5 + 3^{(*)} + 0 = 8$

(*) O examinando comete um erro ocasional (ver critério geral 4.2).

Exemplo 2

$$f''(x) = (2 + \,x\,ln\,x)' = 0 + (x)'.\,ln\,x \,+\, x\,.\,(ln\,x)' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; ln\,x \,+ x\,.\,\frac{1}{x} \;\;\Leftrightarrow\; ln\,x \,+\, \frac{x}{x} \;\;=\; ln\,x$$

$ln\,x \,= 0 \qquad x = e^0 \qquad x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	p.i.	$\cup$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 4^{(**)} + 2(0+0+1+1) + (\,-\,1)^{(***)} = 7$

(*) O examinando comete um erro grave no cálculo da derivada, ao considerar $x/x = 0$ (ver critério geral 4.2.).

(**) Ver critério geral 4.3.

(***) Ver critério geral 6.

Exemplo 3

$$f''(x) = (2 + \,x\,ln\,x)' = 0 + (x)'.\,ln\,x \,+\, x\,.\,(ln\,x)' = ln\,x \,+\, \frac{1}{x}$$

$$ln\,x \,+\, \frac{1}{x} = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \frac{x\,ln\,x\,+1}{x} = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; x\,ln\,x \;\,+\,1 = 0 \;\;\vee\;\; x \neq 0$$

Não tem zeros, logo é impossível analisá-lo em relação às concavidades e pontos de inflexão.

Cotação a atribuir: $2 + 1^{(*)} + 0 = 3$

(*) Ver nota 2.

Exemplo 4

$$f'(x) = 1 + \,ln\,x \qquad\quad f''(x) = \,\frac{1}{x}\; > 0, \quad \forall\,x \in \mathbb{R}^+$$

Logo, tem a concavidade virada para cima e não há pontos de inflexão porque não há mudança de sentido da concavidade.

Cotação a atribuir: $7^{(*)}$

(*) Ver nota 5.

5.1. 10

Expressão que dá a probabilidade **(ver notas 1 e 2)**.. 9

Resultado na forma de fracção irredutível **(ver nota 3)**.. 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir.

   Expressão correcta (ver exemplos na página seguinte) 9

   Expressão que evidencia que o examinando apenas não considerou as duas possibilidades de ordenação das duas primeiras bolas: a primeira branca e a segunda preta ou a primeira preta e a segunda branca (ver exemplos na página seguinte) 4

   Expressão que evidencia que o examinando apenas não considerou as $10!$ possibilidades de ordenação das últimas dez bolas (ver exemplos na página seguinte) 3

   Expressão que estaria corrrecta se a tiragem fosse feita com reposição (ver exemplos na página seguinte) 3

   Outras situações (ver exemplos na página seguinte).............................. 0

2. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de expressões correctas:

$$\frac{2\times 3\times 9\times 10!}{12!} \qquad \frac{2\times {}^{3}C_1\times {}^{9}C_1\times 10!}{12!} \qquad \frac{2\times {}^{3}A_1\times {}^{9}A_1\times {}^{10}A_{10}}{12!}$$

$$\frac{2\times 3\times 9}{12\times 11} \qquad \frac{2\times 3\times 9}{{}^{12}A_2} \qquad \frac{3\times 9}{{}^{12}C_2} \qquad \frac{{}^{3}C_1\times {}^{9}C_1}{{}^{12}C_2}$$

$$\frac{3}{12}\times\frac{9}{11}+\frac{9}{12}\times\frac{3}{11} \qquad \frac{1}{4}\times\frac{9}{11}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{11} \qquad \frac{9}{12}\times\frac{3}{11}\times 2$$

Exemplos de expressões que evidenciam que o examinando apenas não considerou as duas possibilidades de ordenação das duas primeiras bolas:

$$\frac{3\times 9\times 10!}{12!} \qquad \frac{{}^{3}C_1\times {}^{9}C_1\times 10!}{12!} \qquad \frac{{}^{3}A_1\times {}^{9}A_1\times {}^{10}A_{10}}{12!}$$

$$\frac{3\times 9}{12\times 11} \qquad \frac{3\times 9}{{}^{12}A_2}$$

$$\frac{3}{12}\times\frac{9}{11} \qquad \frac{9}{12}\times\frac{3}{11} \qquad \frac{1}{4}\times\frac{9}{11} \qquad \frac{3}{4}\times\frac{3}{11}$$

Exemplos de expressões que evidenciam que o examinando apenas não considerou as $10!$ possibilidades de ordenação das últimas dez bolas:

$$\frac{2\times 3\times 9}{12!} \qquad \frac{2\times {}^{3}C_1\times {}^{9}C_1}{12!} \qquad \frac{2\times {}^{3}A_1\times {}^{9}A_1}{12!}$$

Exemplos de expressões que estariam corrrectas se a tiragem fosse feita com reposição:

$$\frac{2\times 3\times 9}{12^2} \qquad \frac{9}{12}\times\frac{3}{12}\times 2$$

Exemplos de expressões que devem ser cotadas com 0 (zero) pontos:

$$\frac{3\times 9}{12^2} \qquad \frac{1}{9}\times\frac{1}{3} \qquad \frac{2\times {}^{3}C_1\times {}^{9}C_1\times {}^{10}C_8}{12!} \qquad \frac{3\times 9\times 2}{3!\times 9!}$$

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

Casos possíveis: ${}^{12}A_3$

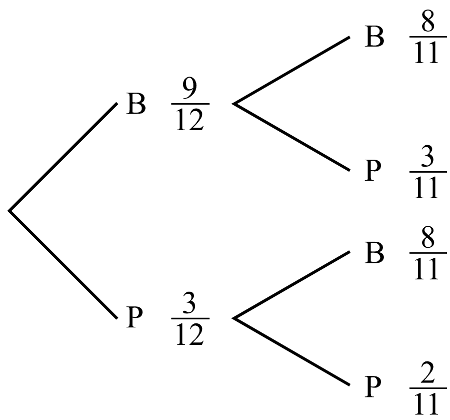
Casos favoráveis: $2 \times 3 \times 9 \times 10$

$$p = \frac{2 \times 3 \times 9 \times 10}{{}^{12}A_3} = \frac{9}{22}$$

Cotação a atribuir: $9^{(*)} + 1 = 10$

(*) O examinando considerou as três primeiras bolas, podendo a terceira ser uma qualquer das dez que faltam sair.

Exemplo 2



$$p = \frac{9}{12} \times \frac{3}{11} + \frac{3}{12} \times \frac{8}{11} =$$

$$= \frac{51}{132} = \frac{17}{44}$$

Cotação a atribuir: $8^{(*)} + 1 = 9$

(*) Considerou-se o valor $8/11$, no caso bola preta (P) seguida por bola branca (B), um erro de distracção do examinando (todos os restantes valores do diagrama em árvore estão correctos). Assim, penalizou-se apenas em 1 ponto a expressão escrita pelo examinando.

Exemplo 3

$P\,B \qquad B P$

$$p = \left(\frac{9}{12} \times \frac{3}{11} \right) \times 2$$

$$\frac{9}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{27}{132} =$$

$$= \frac{9}{44} \times 2 = \frac{9}{22}$$

Cotação a atribuir: $9 + 1 + (-1)^{(*)} = 9$

(*) O examinando comete um erro formal de escrita ($27/132$ não é igual a $9/44 \times 2$).
Ver critério geral 6.

Exemplo 4

$$p = \frac{9}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{10}{10} \times \frac{9}{9} \times \ldots\ldots\ldots \times \frac{1}{1} = \frac{27}{132}$$

Cotação a atribuir: $4^{(*)} + 0^{(**)} = 4$

(*) O examinando apenas não considerou as duas possibilidades de ordenação das duas primeiras bolas.

(**) O valor final não está na forma de fracção irredutível.

Exemplo 5

$$p = \frac{2 \times 2! \times 10!}{12!} = \frac{4}{12 \times 11} = \frac{1}{33}$$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 0^{(**)} = 0$

(*) A expressão escrita pelo examinando não se enquadra em nenhuma das categorias que se considerou merecerem cotação positiva.

(**) Ver nota 3.

5.2. .... **10**

Expressão que dá a probabilidade **(ver notas 1 e 2)**... 9

Resultado na forma de fracção irredutível **(ver nota 3)**..1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir.

Expressão correcta (ver exemplos na página seguinte) 9

Expressão que evidencia que o examinando apenas errou a contagem das posições possíveis para as bolas pretas, na sequência das doze bolas, tendo considerado 9, em vez de 10 (ver exemplos na página seguinte) 6

Expressão que evidencia que o examinando apenas não considerou as 10 posições possíveis para as bolas pretas, na sequência das doze bolas (ver exemplos na página seguinte) 4

Expressão que evidencia que o examinando apenas não considerou as $3!$ possibilidades de ordenação das bolas pretas ou as $9!$ possibilidades de ordenação das bolas brancas (ver exemplos na página seguinte) 4

Outras situações (ver exemplos na página seguinte)..............................0

2. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de expressões correctas:

$$\frac{10 \times 3! \times 9!}{12!} \qquad \frac{3! \times 10!}{12!}$$

$$\frac{3! \times 10}{{}^{12}A_3} \qquad \frac{10}{{}^{12}C_3}$$

$$\frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} \times 10$$

Exemplos de expressões que evidenciam que o examinando apenas errou a contagem das posições possíveis para as bolas pretas, na sequência das doze bolas, tendo considerado 9, em vez de 10:

$$\frac{9 \times 3! \times 9!}{12!} \qquad \frac{3! \times 9}{{}^{12}A_3} \qquad \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} \times 9$$

Exemplos de expressões que evidenciam que o examinando apenas não considerou as posições possíveis para as bolas pretas, na sequência das doze bolas:

$$\frac{3! \times 9!}{12!}$$

$$\frac{3!}{{}^{12}A_3} \qquad \frac{1}{{}^{12}C_3}$$

$$\frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10}$$

Exemplos de expressões que evidenciam que o examinando apenas não considerou as $3!$ possibilidades de ordenação das bolas pretas ou as $9!$ possibilidades de ordenação das bolas brancas:

$$\frac{10 \times 9!}{12!} \qquad \frac{10}{{}^{12}A_3} \qquad \frac{10 \times 3!}{12!}$$

Exemplos de expressões que devem ser cotadas com 0 (zero) pontos:

$$\frac{10}{12!} \qquad \frac{3}{{}^{12}C_3} \qquad \frac{{}^{9}A_3 \times 3!}{12!} \qquad \frac{3}{12} + \frac{2}{11} + \frac{1}{10}$$

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\underbrace{P\,P\,P}_{3!}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{9!}$$

$c.p.\ :\ 12!$ $\qquad$ $c.f.\ :\ 3! \times 10 \times 9!$

$$p = \frac{3! \times 10 \times 9}{12!} = \frac{1}{22}$$

Cotação a atribuir: $9^{(*)} + 1 = 10$

(*) O examinando cometeu um lapso no numerador da fracção, ao escrever 9, em vez de 9!.
No entanto, não existem dúvidas, perante o que está registado antes e depois dessa fracção, que o problema está correctamente resolvido.

Exemplo 2

$$p = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{9} \times \frac{8}{8} \times \ldots\ldots \times \frac{1}{1} = \frac{1}{220}$$

Cotação a atribuir: $4^{(*)} + 1 = 5$

(*) Expressão que evidencia que o examinando apenas não considerou as 10 posições possíveis para as bolas pretas, na sequência das doze bolas.

Exemplo 3

$$c.f. \rightarrow\ {}^{9}A_9 \times {}^{3}A_3$$

$$c.p. \rightarrow\ 12!$$

probabilidade $=$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 0 = 3$

(*) O examinando indica apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escreve a fracção. A expressão que dá o número de casos favoráveis evidencia que o examinando apenas não considerou as 10 posições possíveis para as bolas pretas, na sequência das doze bolas. Assim, de acordo com as notas 1 e 2, a cotação a atribuir deverá ser de $4 - 1 = 3$ pontos.

6. .... **12**

Conteúdo 10

Explicação da expressão ${}^{n}C_2$ **(ver nota 1)**.. 4
Explicação da subtracção de ${}^{n}C_2$ por n **(ver nota 2)**........................ 2
Explicação da multiplicação de ${}^{n}C_2 - n$ por 2 **(ver nota 3)** 1
Explicação da expressão $2n$ **(ver nota 4)** 3

Forma **(ver nota 5)** 2

Notas:

1. A explicação da expressão ${}^{n}C_2$ deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O examinando refere, de forma clara e utilizando linguagem formalmente correcta, que ${}^{n}C_2$ é o número de segmentos de recta definidos pelos vértices de uma das bases 4

O examinando explica o valor ${}^{n}C_2$ de forma clara, mas utiliza linguagem formalmente incorrecta (por exemplo, designa por rectas os segmentos de recta definidos pelos vértices de uma das bases) 3

Outras situações 0

2. A explicação da subtracção de ${}^{n}C_2$ por n deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O examinando refere, de forma clara e utilizando linguagem formalmente correcta, que n é o número de lados de uma base, pelo que ${}^{n}C_2 - n$ é o número de diagonais de uma base.. 2

O examinando explica a subtracção de forma clara, mas utiliza linguagem formalmente incorrecta 1

Outras situações 0

3. A explicação da multiplicação de ${}^{n}C_2 - n$ por 2 deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O examinando refere que, como existem duas bases, é necessário multiplicar ${}^{n}C_2 - n$ por 2 1

Outras situações 0

4. A explicação da expressão $2n$ deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O examinando refere, de forma clara e utilizando linguagem formalmente correcta, que existem duas diagonais em cada face lateral, pelo que $2n$ é o número total de diagonais das faces laterais 3

O examinando explica a expressão $2n$ de forma clara, mas utiliza linguagem formalmente incorrecta 2

Outras situações 0

5. Quanto à forma, a composição deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia) 2

Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecta a inteligibilidade 1

Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade 0

6. Se o examinando se limitar a justificar a expressão do enunciado num caso particular, a sua resposta deve ser cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

O prisma tem n faces laterais, cada uma com duas diagonais, existindo assim um total de $2n$ diagonais nas faces laterais.

Em cada uma das bases existem n vértices, pelo que existem ${}^nC_2$ segmentos de recta por eles definidos. Destes, n são os lados do polígono, pelo que ${}^nC_2 - n$ é o número de diagonais de uma base. Como existem duas bases, existem $2({}^nC_2 - n)$ diagonais nas bases do prisma.

Existem, assim, ao todo, $2\left({}^nC_2 - n\right) + 2n$ diagonais nas faces do prisma.

Cotação a atribuir: $10(4+2+1+3)+2=12$

Exemplo 2

${}^{n}C_2$ é o número de rectas que se podem formar a partir de n vértices da base do prisma, mas é necessário subtrair n pois é o número de rectas formado pelos vértices da base que não corresponde a diagonais. Após calcular o número de diagonais de uma base através de $({}^{n}C_2 - n)$ é necessário multiplicar por 2, pois o prisma regular tem duas bases. Por fim $2n$ é o número de diagonais das faces: existem n faces, cada uma com duas diagonais e por isso se soma $2n$ a $2({}^{n}C_2 - n)$.

Cotação a atribuir: $6(3^{(*)} + 0^{(**)} + 1 + 2^{(***)}) + 1^{(****)} = 7$

(*) O examinando utiliza a designação *recta*, em vez de *segmento de recta*.

(**) O examinando não refere que n é o número de arestas de uma base. Limita-se a traduzir para linguagem corrente a expressão ${}^{n}C_2 - n$.

(***) O examinando utiliza a designação *faces* em vez de *faces laterais*. As bases também são faces do poliedro.

(****) O examinando comete alguns erros de sintaxe que não afectam a inteligibilidade.

Exemplo 3

Um prisma regular em cada face tem duas diagonais, $2n$ representa o número de diagonais das faces do prisma. $({}^{n}C_2 - n)$ representa o número de diagonais de cada base, como tem duas bases, logo $2({}^{n}C_2 - n)$.

Cotação a atribuir: $3(0 + 0 + 1 + 2^{(*)}) + 1^{(**)} = 4$

(*) O examinando utiliza a designação *faces* em vez de *faces laterais*.

(**) O examinando comete alguns erros de pontuação e de sintaxe que não afectam a inteligibilidade.

Exemplo 4

O número das diagonais das faces de um prisma é dado por $2\,({}^{n}C_2 - n) + 2n$, pois se pensarmos no prisma, ele terá duas bases de n lados, portanto o número das suas diagonais será traduzido por ${}^{n}C_2 - n$, pois deverá retirar-se o vértice ao lado porque não é possível fazer diagonal com dois vértices consecutivos é 2 $({}^{n}C_2 - n)$, pois são duas as bases presentes num prisma.

A esse valor soma-se $2n$, pois o prisma é formado por duas bases e n faces laterais que são rectângulos, ou seja, têm duas diagonais, e por isso multiplica por 2 o número de faces laterais do prisma.

Cotação a atribuir: $4(0 + 0 + 1 + 3) + 1^{(*)} = 5$

(*) A redacção só é confusa e com erros que afectam a inteligibilidade na parte da resposta cujo conteúdo foi cotado com 0 (zero) pontos. Na parte restante, os erros cometidos não afectam a inteligibilidade.